# ВВЕДЕНИЕ. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Все математические дисциплины можно условно разделить на *дискретные* и *непрерывные*. Дискретная математика – это та часть математики, главной особенностью которой является изучение отдельных объектов, без привлечения понятия непрерывности, т.е. дискретность – это антипод непрерывности. В дискретной математике отсутствует понятие предельного перехода, присущее классической, «непрерывной» математике. Она занимается изучением дискретных структур, которые возникают как внутри математики, так и в ее приложениях. Однако она зародилась в глубокой древности, раньше, чем непрерывная математика, хотя особую значимость приобрела только в последние десятилетия, в связи с повсеместным внедрением в практику информационных технологий.

Таким образом, в широком смысле дискретная математика включает в себя все разделы математики, в которых не используются топологические методы, в частности понятие непрерывности. Это – все разделы алгебры, математическая логика, почти вся теория чисел (в том числе всевозможные компьютерные арифметики), многие разделы экономико-математических методов, комбинаторика и многие другие дисциплины. В более узком смысле дискретная математика – это те разделы математической логики, алгебры, теории чисел и математической кибернетики, которые непосредственно составляют теоретический фундамент информатики. В этом узком смысле дискретная математика включает в себя теорию булевых функций и их минимизацию, теорию графов и многие разделы теоретической кибернетики, теорию автоматов и формальных грамматик, комбинаторику, теорию алгоритмов (в том числе теорию сложности вычислений), криптографию и теорию кодирования.

Некоторые из вышеперечисленных разделов имеют не только многочисленные «внутренние» (с точки зрения специалиста по информационным системам или вычислительной техники) приложения, используемые, к примеру, при построении различных дискретных устройств, в программировании и т.д., но их результаты и методы применяются также при решении многих нужных для практики задач. Например, при рассмотрении транспортных задач, для нахождения оптимальных решений в управлении, для выделения «узких мест» при планировании и разработке проектов, при составлении оптимальных расписаний, а также при моделировании сложных технологий и процессов различной природы.

Целью изучения дисциплины является ознакомление студентов с системой понятий и некоторыми наиболее важными в приложениях методами теории множеств, математической логики, теории булевых функций и теории графов. Знания и навыки, полученные при ее изучении, используются в дисциплинах: «Информатика», «Программирование», «Структуры и алгоритмы обработки данных в ЭВМ», «Базы данных», «Экспертные и интеллектуальные системы» и т.д. Но в особенности знания по дискретной математике пригодятся при изучении дисциплин, связанных с функциональным и логическим программированием, кодированием и защитой информации.

Основная задача состоит в том, чтобы будущие специалисты чётко освоили основные понятия и приёмы работы с булевыми функциями и графами: построение таблиц значений; поиск и исключение фиктивных переменных; приведение булевых функций к стандартной форме (д.н.ф., к.н.ф., многочлен Жегалкина); основные методы минимизации булевых функций; построение диаграммы (рисунка) графа по его матрицам смежности и инцидентности и обратная задача; установление изоморфизма (одинаковости) графов; определение основных характеристик и свойств графов (векторы степеней, планарность, эйлеровость, гамильтоновость и т.п.); изучение важного частного случая графов – деревьев и их свойств.

За недостатком места о приложениях говорится относительно мало. Однако такие примеры содержатся в литературе.

Данное пособие предназначено в основном для изучения основ именно дискретной математики в узком понимании слова, хотя при этом затронуты основополагающие разделы математической логики – исчисление высказываний и исчисление предикатов. Однако математическую логику настоятельно рекомендуется изучать по более фундаментальным источникам, например, [1, 11,15,16,19,23,29]. В то же время, многие разделы дискретной математики в узком смысле слова в данном пособии никак не отражены, в частности, теория кодирования и криптография, теория алгоритмов и теория сложности вычислений. Это связано, в первую очередь, с ограниченностью отводимого времени для изучения дисциплины в учебных планах у студентов, обучающихся информационным технологиям и использованию вычислительной техники. Курс лекций будет также полезен будущим специалистам по прикладной математике, в частности по математическому и компьютерному моделированию.

Пособие – это существенно поработанный и дополненный вариант пособий [20,21].

# ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Как уже отмечалось выше во «Введении» это пособие не предназначено для глубокого изучения основ математики, в частности математической логики и теории множеств. Тем не менее, изложенного здесь материала по этим разделам математики вполне достаточно для будущих инженеров почти по всем техническим специальностям, в том числе по математическому и компьютерному моделированию.

## 1 МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ. СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ

## 2 БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ. ВАЖНЕЙШИЕ ТИПЫ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

См. лекции № 1,2

# 3 БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ. СЛОЖНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ КАК БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

## 3.1 Булевы алгебры

3.1.1 Алгебра множеств. Пусть $A,B,C$ – произвольные подмножества множества $X$, т.е. $A,B,C\in P(X)$. Как было отмечено в подразделе 1.3, имеют место следующие равенства:

1. Коммутативность пересечения и объединения:

а) $A\cap B = B\cap A$; б) $A\cup B = B\cup A$.

2. Ассоциативность пересечения и объединения:

а) $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$; б) $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$.

3. Дистрибутивность пересечения относительно объединения и объединения относительно пересечения:

а) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$, б) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

5. Идемпотентность объединения и пересечения:

а) $A\cup A=A$; б) $A\cap A=A$.

7. Свойства пустого множества:

а) $A\cup\varnothing = A$; б) $A\cap\varnothing = \varnothing$.

8. Свойства дополнения:

а) $A\cap\overline{A} = \varnothing$; б) $B\cup\overline{B}= X$; в) $\overline{\overline{A}}=A$; г) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; д) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, где дополнение берется относительно множества $X$ (см. подраздел 1.2.).

Таким образом, множество-степень $P(X)$ с операциями пересечения, объединения и дополнения образует систему, которую называют *булевой алгеброй множеств.*

3.1.2 Более общо, пусть $I$ – непустое множество, на котором определены две операции $\sqcap$ и $\sqcup$ с двумя переменными, одна операция $C$ от одной переменной, а также выделены два элемента 0 и 1. Тогда система, состоящая из множества $I$, операций $\sqcap$, $\sqcup$, $C$ и элементов 0,1, называется *булевой алгеброй*, если выполнены свойства 1-8 п. 3.1.1 с заменой множеств $A$, $B$, $C$ на произвольные элементы множества $I$, операций пересечение, объединение и дополнение операциями – $\sqcap$, $\sqcup$, $C$, соответственно, пустого множества – на 0, а множества $X$ – на 1.

Другим тоже очень интересным и естественным примером булевой алгебры является *алгебра высказываний*, к исследованию которой мы сейчас приступим.

## 3.2 Алгебра высказываний

Изучение математической логики начнём с изучения *алгебры высказываний*, на которой базируются другие логические исчисления (логика предикатов, вероятностная логика и т. д.). Алгебра высказываний представляет и самостоятельный интерес, как основа для построения моделей, описывающих некоторые дискретные устройства и объекты, например, так называемые релейно контактные схемы или компоненты графов, см. также [1-3,5-8,10,13,17-19,24,30,31] и разделы 9-13.

3.2.1 Интуитивно под *высказыванием* понимается (простое) повествовательное предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно *истинно* или *ложно*, но не то и другое вместе. Однако, при чисто формальном подходе термин «высказывание» – это также неопределяемое (строго формально) понятие, как и «множество».

Примеры 3.1 Рассмотрим предложения: 1. «Волга впадает в Каспийское море». 2. «Два больше трёх». 3. «Я лгу». Утверждения 1 и 2 являются высказываниями (1 – истинно, 2 – ложно). А утверждение 3 – не высказывание (если предположить, что оно истинно, то в силу его смысла оно одновременно ложно и, наоборот, из ложности этого предложения вытекает его истинность), т.е. это – абсурдное утверждение. Это – краткая формулировка так называемого *парадокса лжеца*.

Следует различать такие абсурдные утверждения и утверждения, истинность которых пока не известна или сомнительна. Сравните, к примеру, «На Марсе могут яблони цвести» и «Иван Васильевич – король Франции».

В алгебре высказываний не рассматривают внутреннюю структуру высказываний, а ограничиваются рассмотрением их свойства представлять истину или ложь. Поэтому на высказывание можно смотреть, как на величину, которая может принимать только одно из двух значений «истина» или «ложь».

Высказывания будем обозначать буквами $A,B,C,...$, а их значения, то есть истину или ложь, соответственно цифрами 1 или 0.

3.2.2 В обычной речи сложные предложения образуются из простых с помощью связок: «и», «или», «если…, то» и др.

Примеры 3.2 1) Светит солнце, *и* идёт дождь. 2) Шесть делится на два *или* шесть делится на три. 3) *Если* контакт замкнут, *то* лампа горит.

Связки можно рассматривать как операции над высказываниями. В обычной речи не всегда удаётся однозначно определить истинность или ложность сложного высказывания по истинности или ложности его составных частей. В алгебре высказываний тоже вводят операции, аналогичные связкам обычной речи, а именно, *логические связки*, причём истинность или ложность сложного высказывания *полностью* определяется истинностью или ложностью его составляющих.

Пусть даны два произвольных высказывания $A$ и $B$.

3.2.2.1 Выражение $A \wedge B$ (читается: «*A и B*») означает высказывание, истинное только в том случае, когда оба высказывания $A$ и $B$ истинны. Такое высказывание называют *конъюнкцией высказываний* $A$ и $B$. Символом «$\wedge$» обозначают операцию *конъюнкции*. Эта операция соответствует союзу «*и*» в обычной речи. Однако в повседневной речи не принято соединять союзом «и» или другими союзами два высказывания, далекие по содержанию. В алгебре же высказываний операция конъюнкции может быть применена к любым двум высказываниям. Так, например, для высказываний «пять больше трех» и «майская трава зеленая» их конъюнкция «пять больше трех и майская трава зелёная» является истинным высказыванием.

Иногда конъюнкцию обозначают другими символами, например, &, или записывают $A \wedge B$ в виде умножения: $A \wedge B = A \cdot B = AB$. В соответствии с этим, конъюнкцию также ещё называют *логическим умножением*, или просто *умножением*. Вполне корректно говорить, что это *минимум* своих аргументов (см. также ниже таблицу 3.1 и п. 6.1.3).

3.2.2.2 Выражение $A \vee B$ (читается: «*A или B*») означает высказывание, истинное, если хотя бы одно из высказываний $A$ или $B$ является истинным. Такое высказывание называют *дизъюнкцией высказываний A* и *B*. Символ «$\vee$» обозначает операцию *дизъюнкции*. Эта операция соответствует союзу «*или*» обычной речи, применяемому в не исключающем смысле, так называемому *соединительному или*, – см. таблицу 3.1.

Обратите внимание – в повседневной речи союз «или» может иметь два смысловых значения: соединительное и исключающее. В первом случае подразумевается, что из двух высказываний, по крайней мере, одно истинно, а может быть и оба истинны. Примером является высказывание «В жаркую погоды пьют воду или едят мороженое». Во втором случае полагают, что из двух высказываний истинным является только одно («Сегодня мы поедем на экскурсию в горы или пойдем на пляж»). Дизъюнкция высказываний соответствует первому случаю, а союз «или» во втором смысле, разделительном, рекомендуется заменять союзом «либо…, либо…».

*Предостережение.* Иногда дизъюнкцию обозначают символом «+», и называют логическим сложением, однако это устаревшее, и самое главное – весьма не удачное название – далее в разделе 6 мы познакомимся с другими логическими связками (так называемыми *булевыми функциями*), среди которых есть более подходящие для того, чтобы называться сложением. Мы ещё вернёмся к этому в п. 6.1.3.

3.2.2.3 Выражение $A \to B$ (читается: «*если A, то B*» или «*A влечет B*») означает высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда $A$ истинно, а $B$ ложно. Такое высказывание называют *импликацией высказываний* $A$ и $B$. Высказывание $A$ называется *условием* или *посылкой* (иногда говорят, что это – *антецедент*), высказывание $B$ – *заключением* или следствием импликации (иногда говорят, что это – *консеквент*). Символ «$\to$» обозначает *операцию импликации*, в некоторых книгах эту операцию обозначают так: $\supset$, но мы это обозначение использовать не будем.

В обычной речи операции импликации соответствует связка «*если* ..., *то*…». Отличие состоит в том, что эта связка обычно предполагает смысловую зависимость соединяемых высказываний, а для операции «$\to$» смысловая связь несущественна. Так, например, высказывания «если $2 \times 2 = 5$, то трава синяя» и «если на Марсе есть органическая жизнь, то восемь делится на четыре» являются истинными, так как у первого из них ложная посылка, а у второго – истинное следствие, хотя о посылке в настоящий момент мы этого пока сказать не можем. Импликация «*если* $2\times2= 4$, *то* $5< 2$» ложна, поскольку ее условие истинно, а заключение ложно.

Внимательный читатель может увидеть, что определённое выше истинностное значение для импликации $A\to B$ (см. ниже таблицу 3.1) расходится с интуитивным пониманием утверждения «*Из A следует B*». Мы обсудим этот интересный феномен позже в подразделе 3.3.

3.2.2.4 Выражение $\overline{A}$ (или $\neg A$) (читается: «*не A*») означает высказывание, которое истинно, когда $A$ ложно, и которое ложно, когда $A$ истинно. Такое высказывание называют *отрицанием высказывания A*. Символы « $\overline{\ \ }$ » (черта над буквой) и знак «¬» перед буквой обозначают операцию *отрицания*. В обычной речи этой операции соответствует частица «*не*». Например, для истинного высказывания «восемь делится на четыре» отрицанием является ложное высказывание «неверно, что восемь делится на четыре» или «восемь не делится на четыре».

Эти четыре связки – конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию и отрицание обычно относят к классическим логическим связкам.

3.2.2.5 Выражение $A\sim B$ (читается: «*A эквивалентно B*» или «*для того, чтобы A, необходимо и достаточно, чтобы B*», или «*A* тогда *и только тогда, когда B*», или «*A равносильно B*») означает высказывание, которое истинно тогда и только тогда *A* и *B* оба истинны или оба ложны. Такое высказывание называют *эквивалентностью высказываний A* и *B*. Символ «~» (или « ≡ », или «↔») означает операцию *эквивалентности*. В обычной речи этой операции соответствует связка «*…тогда и только тогда, когда…*». Примером эквивалентности может служить высказывание «Треугольник *ABC* равнобедренный тогда и только тогда, когда угол при вершине *B* равен углу при вершине *C*».

Итог этих определений из пп. 3.2.2.1-5 собран в таблице 3.1.

Если *A,B,C* – произвольные высказывания, то, применяя к ним операции конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквивалентности и отрицания, можно получить новые сложные высказывания, например, $((A\vee B)\wedge C)\to\neg(A\to B)$.

Таблица 3.1 – Истинностная таблица для основных операций над высказываниями

| $X$ | $\overline{X}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| $X$ | $Y$ | $X\wedge Y$ | $X\vee Y$ | $X\to Y$ | $X\sim Y$ | $\overline{X}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

3.2.3 Наряду с высказываниями, принимающими определенные и постоянные значения 1, 0 и называемыми *определенными высказываниями*, в алгебре высказываний рассматривают переменные для высказываний, которые рассматриваются как величины, принимающие одно из двух значений 1 или 0, но не имеют определённого значения. Такие переменные называются *пропозициональными*, реже *булевыми*, т.е. это не совсем обычные переменные, а специальные, введённые исключительно для высказываний.

Если $X,Y,Z$ – пропозициональные переменные, то, применяя к ним операции конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквивалентности и отрицания, можно получить *формулы* алгебры высказываний. Строгое определение этого понятия – см. в подразделе. 4.2.

При задании значений переменных высказываний формула принимает определенное значение. Таким образом, каждая формула определяет некоторую функцию (их часто ещё называют *булевыми* см. также раздел 5), переменными которой являются переменные высказывания. Переменные и функции принимают только два значения: истина или ложь, поэтому функции можно описать конечной таблицей, которую называют *истинностной таблицей* или *таблицей истинности* данной формулы.

Истинностные таблицы самых простейших формул $X \wedge Y, X \vee Y, X \rightarrow Y, X \sim Y, \neg X$ приведены в таблице 3.1.

Возможен случай, когда две формулы имеют одну и ту же истинностную таблицу. Такие формулы называют *равносильными*. При этом количество и состав переменных в формулах могут не совпадать. Так, например, равносильными являются формулы $\neg Y \vee Z$ и $Y \rightarrow (Z \wedge (X \vee \neg X))$ (таблица 3.2).

Упражнение 3.1 *Проверьте правильность этого утверждения, для этого необходимо заполнить пустующие столбики в таблице 3.2. Попробуйте сделать это, не подглядывая в таблицу 3.1.*

Таблица 3.2 – Истинностная таблица для равносильных формул

| $X$ | $Y$ | $Z$ | $\neg Y$ | $\neg Y \vee Z$ | $\neg X$ | $X \vee \neg X$ | $Z \wedge (X \vee \neg X)$ | $Y \rightarrow (Z \wedge (X \vee \neg X))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | | 1 | | | | 1 |
| 0 | 0 | 1 | | 1 | | | | 1 |
| 0 | 1 | 0 | | 0 | | | | 0 |
| 0 | 1 | 1 | | 1 | | | | 1 |
| 1 | 0 | 0 | | 1 | | | | 1 |
| 1 | 0 | 1 | | 1 | | | | 1 |
| 1 | 1 | 0 | | 0 | | | | 0 |
| 1 | 1 | 1 | | 1 | | | | 1 |

Если все значения формулы в истинностной таблице равны 1, то формула называется *тождественно истинной* или *тавтологией*. Тавтологии называют также *законами логики*. Естественно, что если значения формулы состоят из одних нулей, то эта формула называется *тождественно ложной*.

3.2.4 Логические связки – это, по сути, операции над высказываниями. Часть этих операций обладает теми же свойствами, что и операции над множествами. Более точно, если в перечисленных в п. 3.1.1 свойствах операции пересечения $\cap$, объединения $\cup$ и дополнения $\overline{\phantom{x}}$ заменить конъюнкцией $\wedge$, дизъюнкцией $\vee$ и отрицанием $\neg$, соответственно, то получатся верные утверждения о высказываниях. При этом отношение равенства = нужно заменить эквивалентностью $\sim$, пустое множество $\varnothing$ – знаком ложного высказывания 0, универсальное множество $X$ – знаком истинного высказывания 1. Более полно свойства булевых функций описаны в разделе 6.

Таким образом, если $I$ – это множество всех высказываний, то оно вместе с операциями $\wedge$, $\vee$ и $\neg$, а также с выделенными ложным 0 и истинным 1 высказываниями, образует булеву алгебру высказываний, в полном соответствии с п. 3.1.2.

## 3.3 Интуитивный и формальный смысл импликации

В обычном языке рассуждения часто имеют импликативную форму, например, «**если** *это есть то* **и** *это – то*, **то** *вон то будет этим* **и** *тогда-то*». При этом стоит заботиться не об истинности или ложности посылок и заключений, а о правильности всего рассуждения (особенно, если Вы хотите произвести впечатление или отвлечь внимание). Рассуждения должны быть правильными, то есть соответствующие им импликации должны быть тождественно истинными. С этой точки зрения задачей логики можно считать исследование тавтологий. Тождественную истинность формулы можно всегда обнаружить с помощью таблиц истинности.

Примеры п. 3.2.2.3 показывают, что импликация $A \to B$ полностью адекватно не описывает наше интуитивное понимание того факта, что из утверждения $A$ следует $B$. Более того, даже из истинного утверждения могут не следовать многие другие истинные высказывания, если следование понимать в обыденном смысле, это показывает следующий

Пример 3.3 Пусть $A$ – это «Вы сейчас читаете данный курс лекций по дискретной математике», а $B$ – «в этом году в Усть-Каменогорске были или будут солнечные дни». Очевидно, что оба утверждения истинны, однако как из $A$ не следует $B$, так и наоборот, из $B$ не следует $A$ при обычном понимании следования. (Заметим, что это и прекрасно – ибо, представьте себе на минутку, какой бы был кошмар, будь это не так.) Но в тоже время, обе импликации $A \to B$ и $B \to A$ истинны согласно определению. Таким образом, даже четвёртая строка таблицы значений для импликации (таблица 3.1) не полностью отражает реальность.

Итак, многочисленные примеры подтверждают следующий

Тезис первый. *Формальное определение импликации, заданное таблицей 3.1 расходится со здравым смыслом, т.е. с интуитивным пониманием, что означает факт следования из одного утверждения другого.*

С другой стороны, мы сейчас обоснуем уточняющий

Тезис второй. *Только такая таблица значений для импликации, что приведена в таблице 3.1, ближе всего к интуитивному пониманию отношения следования.*

Обоснование. Рассмотрим утверждение $C$: «Из $A$ и $B$ следует $B$» (если Вам показалось, что букву $A$ мы обидели, не сказав, что из «из $A$ и $B$ следует $A$», то Вы можете это легко исправить: для этого достаточно повторить нижеследующие рассуждения, немного их изменив, и для утверждения $D$: «Из $A$ и $B$ следует $A$»).

Согласитесь, что с точки зрения здравого смысла утверждение $C$ должно быть истинным для любых высказываний $A$ и $B$, независимо от их значений (равно как и $D$). Значит, при обоих ложных $A$ и $B$, получим следующую картину: высказывание $E$= «$A$ и $B$» – ложно; но всё утверждение $C$, равное «Из $E$ следует $B$», как мы отметили выше должно остаться истинным. А так как высказывание $B$ было выбрано ложным, то тем самым мы обосновали тот факт, что из ложного утверждения $E$ вполне может следовать ложное заключение $B$, т.е. мы обосновали отчасти первую строку в таблице значений для импликации (таблица 3.1).

Оставим теперь $A$ ложным, а в качестве $B$ возьмём истинное высказывание. Тогда утверждение $E$ всё равно останется ложным, а всё $C$ истинным, и следовательно, из ложного $E$ может следовать истинное $B$, и мы получаем обоснование второй строки таблицы значений для импликации.

Очевидно, что третья строка этой таблицы со здравым смыслом вполне согласуется. Действительно, как из истинного утверждения может следовать ложное?

Упражнение 3.2 *Привести примеры, подтверждающие разумность четвёртой строки, а именно, допустимость того, что из истинного высказывания может следовать истинное.*

Упражнение 3.3 *Попробуйте объяснить, почему приведённые в этом пункте рассуждения были названы «обоснованием», а не «доказательством». Сравните ваше объяснение с определением строгого, формального доказательства из подраздела 4.1.*